

Početní část 1 - 8.2.2021

1. Položme pro $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = Ax^4 + Bx^2 + Cx + D$$

a

$$h(x) = \arctg(e^{-x}) + \operatorname{argsinh}(e^{-x}) - \operatorname{argsinh}(1).$$

Spočítáme si

$$g'(x) = 4Ax^3 + 2Bx + C, \quad g''(x) = 12Ax^2 + 2B$$

a tedy

$$g(0) = D, \quad g'(0) = C, \quad g''(0) = 2B$$

a dále

$$h'(x) = -\frac{e^x (\sqrt{e^{-2x} + 1} + 1)}{e^{2x} + 1}, \quad h''(x) = \frac{e^x (-\sqrt{e^{-2x} + 1} + e^{2x} (\sqrt{e^{-2x} + 1} + 1) + 1)}{\sqrt{e^{-2x} + 1} (e^{2x} + 1)^2}$$

a tedy

$$h(0) = \frac{\pi}{4}, \quad h'(0) = -\frac{1 + \sqrt{2}}{2}, \quad h''(0) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Předně si všimneme, že

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x), & x > 0, \\ h'(x), & x < 0 \end{cases}, \quad f''(x) = \begin{cases} g''(x), & x > 0, \\ h''(x), & x < 0 \end{cases}$$

Funkce f má zjevně spojitou druhou derivaci na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pro libovolnou volbu A, B, C a D . Aby byla f'' spojitá v 0 (a tedy speciálně existovala) musí být f i f' spojité v 0. Pro spojitost f v 0 potřebujeme

$$\frac{\pi}{4} = h(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) = D.$$

Když víme, že f je spojitá v 0, můžeme počítat

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = g'(0) = C$$

a

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h'(x) = h'(0) = -\frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

Jelikož pro existenci (a současně spojitost) f' v 0 potřebujeme $f'_-(0) = f'_+(0)$, dostáváme $C = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Obdobně pak dostaneme porovnáním druhých derivací rovnici $2B = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Celově tedy dostáváme, že f má spojitou druhou derivaci na $\mathbb{R}$ pro $D = \frac{\pi}{4}$, $C = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, $B = \frac{\sqrt{2}}{8}$ a $A \in \mathbb{R}$ libovolné.

2. $D_f = \mathbb{R}$ a f je spojitá na D_f (čitatel i jmenovatel jsou polynomy a jmenovatel není nikdy roven 0).

Snadno rovněž spočteme, že $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ odtud snadno vidíme, že asymptota v $\pm\infty$ je $y = 0$.

Funkce je zjevně lichá (a není sudá ani periodická).

V dalším kroku si spočítáme

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Odtud hned vidíme, že

$$f'(x) = 0 \iff x = \pm 1$$

a navíc

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-1, 1)$$

a

$$f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

Funkce je tedy rostoucí na $(-1, 1)$ (a ze spojitosti na $[-1, 1]$), a klesající na $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$ (a ze spojitosti na $(-\infty, -1]$ a $[1, \infty)$).

Spočteme ještě $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = 0$.

Bod -1 je tedy bodem lokálního minima a bod 1 bodem lokálního maxima. Protože $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ platí, že -1 je i bodem globálního minima a bod 1 bodem globálního maxima.

Obor hodnot je tedy (funkce je spojitá) $[f(-1), f(1)] = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Dále

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Platí tedy

$$f''(x) = 0 \iff x = 0, \pm\sqrt{3},$$

$$f''(x) > 0 \iff x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$$

a

$$f''(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3}).$$

Funkce je tedy konvexní na $(-\sqrt{3}, 0)$ a $(\sqrt{3}, \infty)$ (a ze spojitosti na $[-\sqrt{3}, 0]$ a $[\sqrt{3}, \infty)$), a konkávní na $(-\infty, -\sqrt{3})$ a $(0, \sqrt{3})$ (a ze spojitosti na $(-\infty, -\sqrt{3}]$ a $[0, \sqrt{3}]$). Inflexní body jsou $0, \pm\sqrt{3}$.

